Tentamen Lineaire Algebra 1, 24 augustus 2007

De toets bestaat uit 6 vraagstukkken. U krijgt 180 minuten om deze vraagstukken te beantwoorden. U moet de antwoorden beargumenteren. De puntenwaardering kunt u vinden aan het einde van de vraagstukken.

1. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & \beta \end{pmatrix}$$

met $\beta \in \mathbb{R}$.

a. Bestaan er waarden van β waarvoor het stelsel $Ax = 0$ strijdig is?

b. Bepaal alle waarden van β waarvoor het stelsel $Ax = 0$ precies 1 oplossing heeft, en bepaal die oplossing.

c. Bepaal alle waarden van β waarvoor het stelsel $Ax = 0$ oneindig veel oplossingen heeft, en bepaal de oplossingsverzameling.

Stel b is de vector gegeven door

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

d. Bepaal alle waarden van β waarvoor het stelsel $Ax = b$ strijdig is.

e. Bepaal alle waarden van β waarvoor het stelsel $Ax = b$ consistent is, en bepaal de oplossingsverzameling.

2. Laat $\mathbb{R}^{n\times n}$ de vectorruimte zijn van alle $n \times n$ matrices met reële coefficienten. Een matrix A heet symmetrisch indien $A^\top = A$. Laat S de deelverzameling zijn van $\mathbb{R}^{n\times n}$ van alle symmetrische matrices A.

a. Toon aan dat S een deelruimte is van $\mathbb{R}^{n\times n}$.

In de rest van deze opgave, neem aan dat $n = 2$.

b. Bepaal een basis E van S. Wat is de dimensie van S?

c. Bepaal een basis F van $\mathbb{R}^{2\times 2}$ zodat $E \subseteq F$.

3. Definieer de lineaire afbeelding L van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^3$ door

$$L(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}.$$

a. Bepaal de matrix van L ten opzichte van de standaard-bases in $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$.

b. Bepaal de kern $\ker(L)$ van L.

c. Bepaal een basis van de range $L(\mathbb{R}^2)$ van L.

4. Voor een gegeven geheel getal n is P_n de vectorruimte van alle polynomen $p(x)$ van graad kleiner dan n, met reële coefficienten.

a. Geef een basis van P_n.

b. Bepaal de dimensie van P_n.

Een polynoom $p(x)$ wordt *even* genoemd indien $p(x) = p(-x)$ voor alle x. Bekijk nu de deelverzameling E_n van P_n bestaande uit alle even polynomen.

c. Laat zien dat E_n een deelruimte is van P_n.

d. Neem aan dat $n = 6$. Bepaal een basis van E_6.

e. Neem aan dat $n = 6$. Bepaal de dimensie van E_6.

5. Laat V een vectorruimte zijn.

a. Schrijf precies op wat we verstaan onder een inproduct op V.

b. Neem nu $V = C[0,1]$, de vectorruimte van alle continue functies van $[0,1]$ naar $\mathbb{R}$. Laat zien dat door

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

een inproduct wordt gedefinieerd op V.

6. Stel A en B zijn $n \times n$ matrices.

a. Toon aan: als $\lambda \neq 0$ een eigenwaarde is van AB, dan is λ ook een eigenwaarde van BA.

b. Toon aan: als $\lambda = 0$ een eigenwaarde is van AB, dan is $\lambda = 0$ ook een eigenwaarde van BA.

Puntenwaardering:

Vraagstuk 1: 20
Vraagstuk 2: 12
Vraagstuk 3: 12
Vraagstuk 4: 20
Vraagstuk 5: 16
Vraagstuk 6: 10